Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Üben und Vertiefen durch Analogien

Thilo Steinkrauß

Herder-Gymnasium Berlin

19.09.2013

FELIX KLEIN * $5^2.2^2.43^2$ in Düsseldorf; † 22.06.1925 in Göttingen

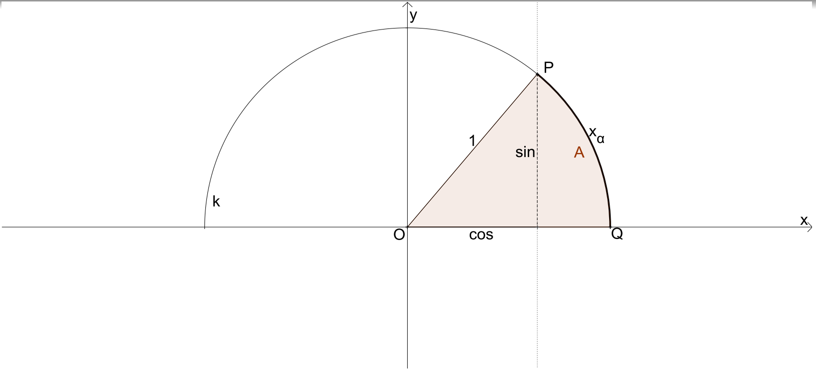
FELIX KLEIN * $5^2.2^2.43^2$ in Düsseldorf; † 22.06.1925 in Göttingen

Alle Pädagogen sind sich darin einig: Man muss vor allem tüchtig Mathematik treiben, weil ihre Kenntnis fürs Leben größten direkten Nutzen gewährt.

Doppelte Diskontinuität: „Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder weniger angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluß hat.

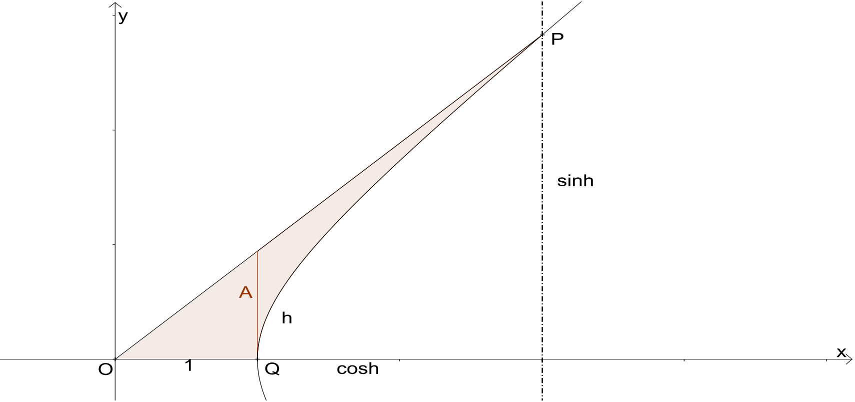
[...] Meine Aufgabe hier wird stets sein, Ihnen den *gegenseitigen Zusammenhang der Fragen der Einzeldisziplinen* vorzuführen, [...], sowie insbesondere ihre *Beziehungen zu den Fragen der Schulmathematik* zu betonen. [...]: daß Sie dem großen Wissensstoff, der Ihnen hier zukommt, einst in reichem Maße lebendige Anregungen für Ihren eigenen Unterricht entnehmen können."

aus: Felix Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, 1. Bd. Arithmetik, Algebra, Analysis



$$x^2 + y^2 = 1 \qquad A = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{x_\alpha}{2\pi} = \frac{x_\alpha}{2}$$

$$y = \sin(x_\alpha) = \sin(2A)$$
$$x = \cos(x_\alpha) = \cos(2A)$$



$$x^2 - y^2 = 1 \qquad A = ???$$

$$y = \sinh(2A)$$
$$x = \cosh(2A)$$

Trigonometrischer Pythagoras und hyperbolischer „Pythagoras“:

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Bijektivität, Umkehrfunktionen:

$$\begin{aligned} \arcsin &: [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right], \arcsin(x) = x_\alpha = 2A \\ \arccos &: [-1;1] \to [0;\pi], \qquad \arccos(x) = x_\alpha = 2A \end{aligned}$$

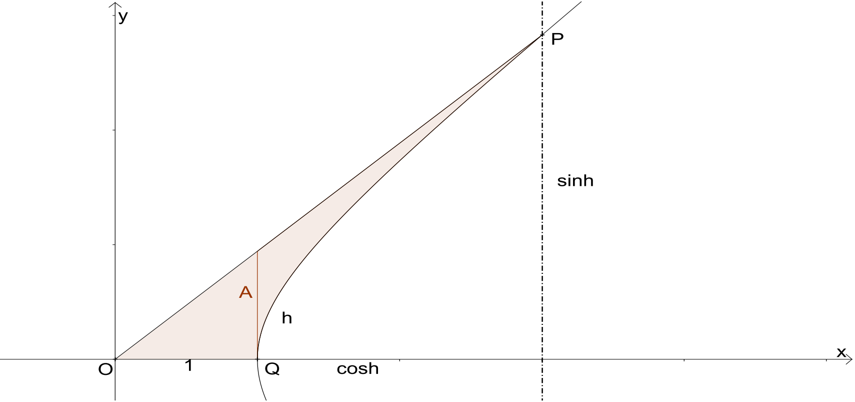
Bijektivität, Umkehrfunktionen:

$$\begin{aligned} \arcsin &: [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right], \arcsin(x) = x_\alpha = 2A \\ \arccos &: [-1;1] \to [0;\pi], \qquad \arccos(x) = x_\alpha = 2A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arsinh}(x) = 2A \\ \operatorname{arcosh} &: [1;+\infty] \to [0;+\infty], \quad \operatorname{arcosh}(x) = 2A \end{aligned}$$

$$\sin(x) = \Im(e^{ix}) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = \Re(e^{ix}) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$



$$
\begin{aligned}
x^2 - y^2 &= 1 \\
A &= \frac{x \cdot \sqrt{x^2-1}}{2} - \int_1^x \sqrt{t^2-1}\, dt = \quad :(
\end{aligned}
$$

Idee: Drehung um $\frac{\pi}{4}$ (gegen den Uhrzeigersinn)

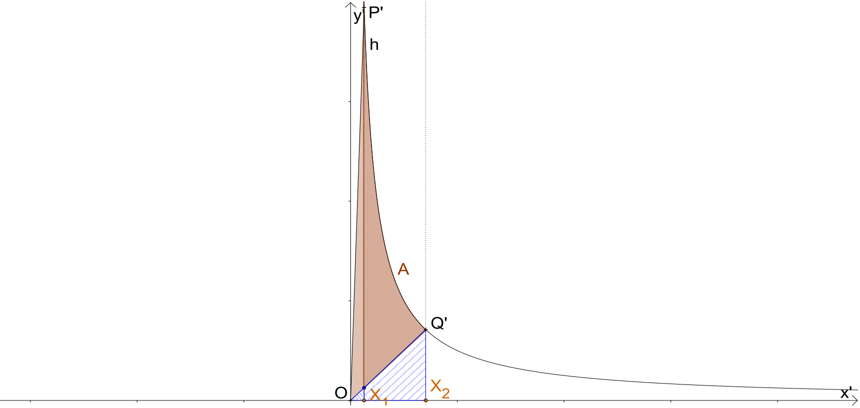
$$D = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Idee: Drehung um $\frac{\pi}{4}$ (gegen den Uhrzeigersinn)

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (x - y) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (x + y) \end{pmatrix} \\
&\underset{y=\sqrt{x^2-1}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Idee: Drehung um $\frac{\pi}{4}$ (gegen den Uhrzeigersinn)

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (x-y) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (x+y) \end{pmatrix} \\
&\underset{y=\sqrt{x^2-1}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \end{pmatrix} \\
\frac{1}{2 \cdot x'} &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{2} \cdot \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} \\
&= y'
\end{aligned}$$



$$y' = \frac{1}{2 \cdot x'} \text{ und } A = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2 \cdot x'}\, dx' = \quad :)$$

$$\text{wegen } A\left(\Delta(OX_1P')\right) = A\left(\Delta(OX_2Q')\right) = \frac{1}{4}$$

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(x - \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{y}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x + \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{y}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2} \cdot \ln \left(x - \underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \ln \left(x + \underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{y} \right) \\
-2A &= \ln (x - y) \\
2A &= \ln (x + y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2} \cdot \ln \left(x - \underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \ln \left(x + \underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{y} \right) \\
-2A &= \ln (x - y) \\
2A &= \ln (x + y) \\
e^{-2A} &= x - y \\
e^{2A} &= x + y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2} \cdot \ln \left(x - \underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \ln \left(x + \underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{y} \right) \\
-2A &= \ln (x - y) \\
2A &= \ln (x + y) \\
e^{-2A} &= x - y \\
e^{2A} &= x + y \\
e^{2A} + e^{-2A} &= 2x \\
e^{2A} - e^{-2A} &= 2y
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2A} + e^{-2A}\right) &= x = \cosh(2A) \\ \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2A} - e^{-2A}\right) &= y = \sinh(2A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right) \\
\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)
\end{aligned}$$

Taylorentwicklung:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

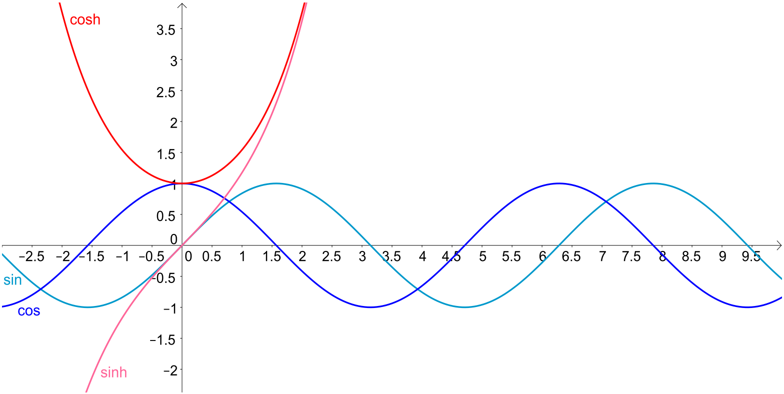
$$\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cdot\cos(y)-\sin(x)\cdot\sin(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot\sin(y)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cdot\cos(y)-\sin(x)\cdot\sin(y)\\
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cdot\cosh(y)+\cosh(x)\cdot\sinh(y)\\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cdot\cosh(y)+\sinh(x)\cdot\sinh(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin' &= \cos\\ \cos' &= -\sin\\ \sinh' &= \cosh\\ \cosh' &= \sinh\end{aligned}$$


cosh
sinh
sin
cos
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5 −2 −1.5 −1 −0.5 0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5

Die Seilkurve (Kettenlinie, Katenoide) ist die Kurve, die sich im Gleichgewicht einstellt, wenn die Endpunkte eines unelastischen, homogenen und vollkommen biegsamen Seiles konstanten Querschnitts an zwei (nicht notwendig gleich hohen) Stellen im Schwerefeld befestigt sind und das Seil außer seinem eigenen Gewicht keinen anderen Belastungen unterworfen ist.

`http://blog.kleinproject.org/`

Über uns

Das Klein-Projekt hat das Ziel, eine Gemeinschaft für das Lernen über die Zusammenhänge zwischen Schulmathematik und zeitgenössische Forschung in den mathematischen Wissenschaften aufzubauen. Ein Vehikel dafür ist eine „Klein Vignette“, ein kurzes Schriftstück über ein bestimmtes Teilgebiet der Mathematik.