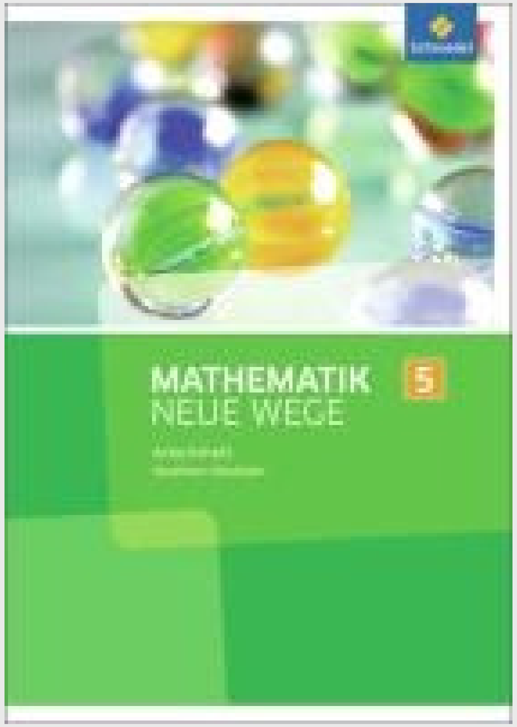
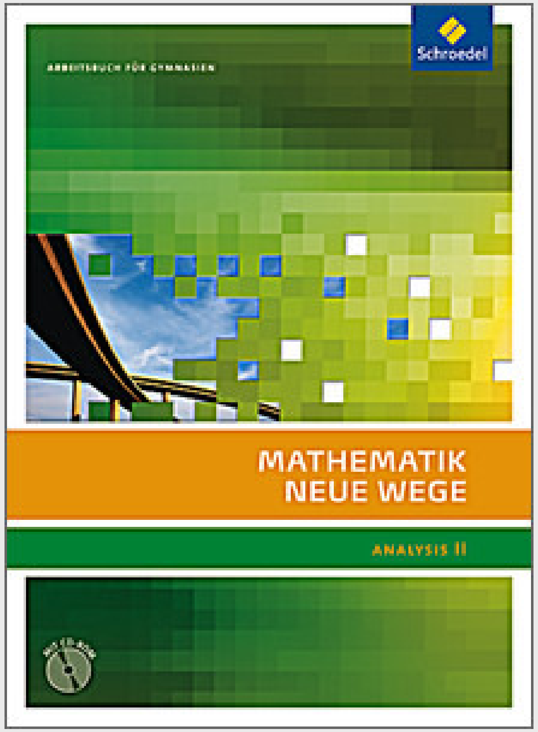
Henning Körner

Projekte aus MATHEMATIK NEUE WEGE



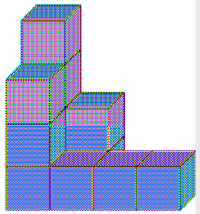


Klasse 5

Projekt

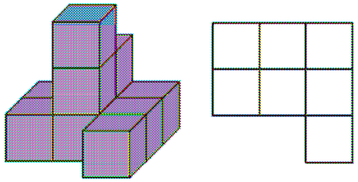
Würfelhäuser

Aus gleich großen Würfeln lassen sich viele verschiedenartige Würfelgebäude aufbauen.



A Paul meint, dass das Würfelhaus aus 12 kleinen Würfeln aufgebaut wurde.
Ricarda sagt, dass man sich da nicht sicher sein kann, es könnten auch 13 sein. Hat sie recht?

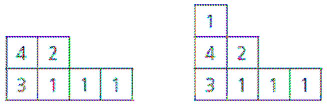
Teamarbeit
Wenn ihr selbst Würfelhäuser baut, teilt euch die Arbeit. Jeder in der Klasse baut zwei Würfel mit der Kantenlänge 5 cm. Ihr könnt viele verschiedene Würfelhäuser aufbauen.



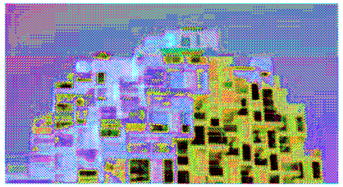
B Zeichne den Grundriss zu dem Würfelhaus in dein Heft und trage die Anzahl der Würfel über den Quadraten ein.
Wie viele zusätzliche kleine Würfel brauchst du, um das Würfelhaus zu einem großen Würfel zu ergänzen?

Tipp

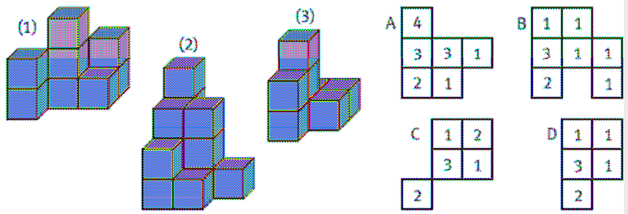
Das Schrägbild von Würfelhäusern verrät nicht alles. Wir geben deshalb eine Zusatzinformation:
1. Wir zeichnen das „Fundament" des Würfelhauses aus Quadraten.
2. In jedes Quadrat tragen wir ein, wie viele Würfel darüber gebaut sind. Architekten nennen solche Bilder der Grundfläche auch „Grundriss".
Für das Würfelhaus in A sind z. B. folgende Zusatzbilder möglich:



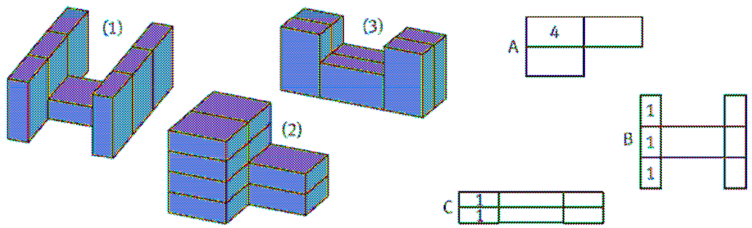
C Welcher Grundriss passt zu welchem Würfelgebäude?



Dieses Haus ist natürlich nicht aus einzelnen Würfeln zusammengesetzt, aber es sieht beinahe so aus.



D Nun bauen wir Quaderhäuser aus Streichholzschachteln, zunächst in der Vorstellung.
Welcher Grundriss gehört zu welchem Gebäude?



Baut nun zu zweit Gebäude nach Plan. Ein Partner zeichnet einen Grundriss, der oder die andere baut diesen mit Streichholzschachteln nach.

Projekt

Graue Riesen

Für die asiatischen Elefanten (früher sagte man indische Elefanten) im Zoo Hannover war 2010 ein ganz besonderes Jahr: gleich fünf Elefantenkühe brachten ihre Kinder zur Welt. Das hatte es bis dahin in keinem Zoo der Welt gegeben. Zur Zeit (2012) leben zwölf asiatische Elefanten in Hannover.

Die Elefantenkinder Nuka, Felix, Dinkar, Saphira und Soraya (2012)

Steckbrief des asiatischen Elefanten
(Elephas maximus)

- Wird bis zu 3,10 m hoch und 5 t schwer.
- Badet gern und schwimmt gut.
- Hat einen Rüssel mit zwei Greiffingern.
- Liebt Gras, Heu, Äste, Baumrinde und Früchte.
- Frisst jeden Tag 150 kg Futter und trinkt 150 l Wasser.
- Der älteste asiatische Elefant lebte im Zoo von Taipeh und wurde 86 Jahre alt.

A Der Zoo muss für 100 kg Grünfutter 10 € bezahlen. Was kostet das Futter täglich? Erstellt auch einen Plan für die Wochen-, Monats- und Jahreskosten.

B Wie viele Tage braucht ein Elefant, bis er so viel wie sein Körpergewicht „gefuttert“ hat?

C Hannibal war ein berühmter afrikanischer Feldherr, der mit seinen Truppen vor mehr als 2000 Jahren gegen die Römer kämpfte. Er überquerte mit seinen 37 Kriegselefanten sogar die verschneiten Alpen. Welche Futtermenge benötigte er für seine Elefanten in einer Woche? Vergleiche mit einer normalen Lkw-Ladung; diese beträgt 7,5 t.

Tierwahl

Bestimmt hast du ein Lieblingstier oder dich interessiert eine bedrohte Tierart. Besorge dir aus einem Tierlexikon oder dem Internet möglichst viele Angaben zu deinem Lieblingstier.
Beispiele:

Informationssammlung

Geburtsgewicht, Länge/Größe, Lebensdauer, Futterbedarf, Tragzeit der Mutter, Schlafdauer, Herzschläge pro Minute, …

Ideen zur Posterstellung

Erstellt Poster mit passenden Tabellen und Diagrammen, auf denen ihr eure Lieblingstiere mit Mensch und asiatischem Elefant vergleicht.

Beschriftet die Abbildungen eurer Tiere mit einem passenden Maßstab, so kann sich jeder vorstellen, wie groß (oder klein) das Tier in Wirklichkeit ist.
Denkt euch knifflige Sachaufgaben rund um die gefundenen Größen aus und stellt sie euren Mitschülerinnen und Mitschülern.

Präsentation

Überlegt euch, wo und wie ihr die Plakate präsentieren wollt. Wer hat das informativste Poster gestaltet? Von wem stammt die interessanteste Aufgabe?

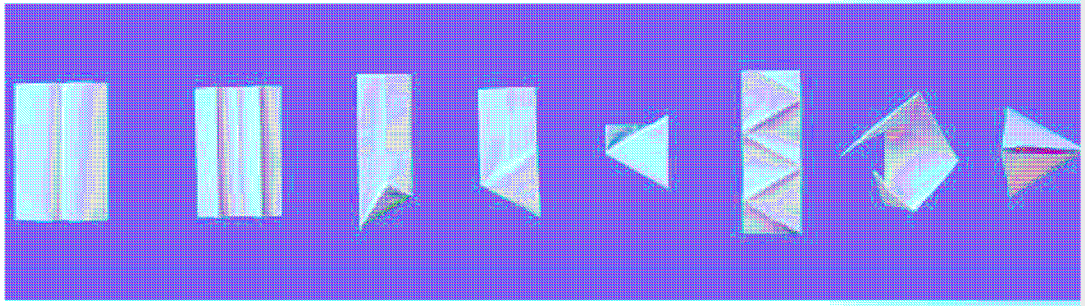
Klasse 7

Erkundungen rund um den Tetraeder

Projekt

Den Tetraeder hast du bereits kennen gelernt. Er gehört zu den platonischen Körpern und ist aus gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt.

Auftrag 1: Falte einen Tetraeder aus einem DIN-A4-Blatt. Die Fotos helfen dabei:



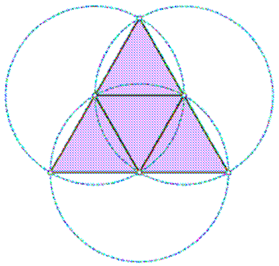
Der Keplerstern – zwei Tetraeder durchdringen sich

Was geschieht, wenn sich zwei Tetraeder den Raum in einen Würfel teilen?
Das Schrägbild auf Isometriepapier gibt dir einen ersten Eindruck.

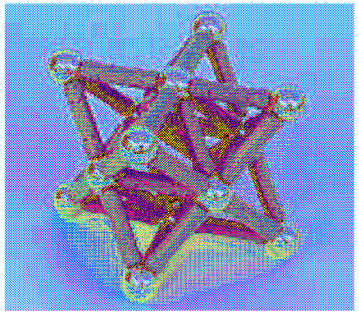
Auftrag 2: Baue deinen eigenen Keplerstern.
Die folgenden Tipps können dir helfen.

Tipp 1: Eigentlich handelt es sich beim Keplerstern um einen Tetraeder (gelb) auf dessen Flächen 4 weitere Tetraeder (rot) mit halber Kantenlänge aufgesetzt sind.

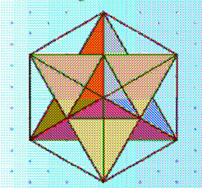
Tipp 2: Wie konstruiert man das Netz eines Tetraeders?



Tipp 3: Mit einem Magnetbaukasten lässt sich das Problem auch lösen:



Vom Tetraeder zum Keplerstern



Johannes Kepler (1571 – 1630) war ein berühmter Astronom und Mathematiker.

Weitere Aktivitäten

Ausstellung
Bemalt eure Keplersterne und hängt sie an Fäden im Klassenzimmer oder der Aula auf.

Forscherauftrag
Gilt für den Tetraeder und den Keplerstern die Formel:
Ecken + Flächen – Kanten = 2?

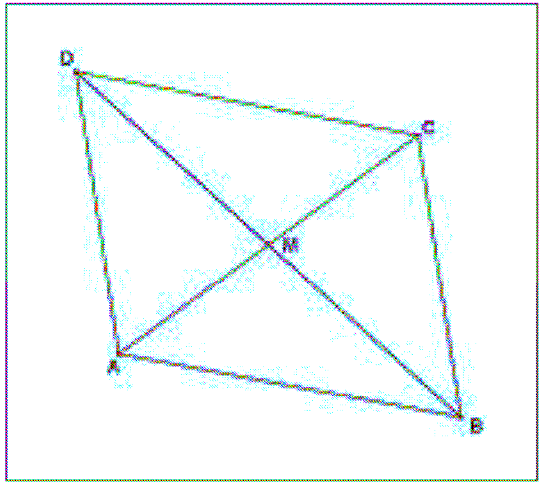
Klasse 8

Vierecke untersuchen mit dem DGS

Vierecke hast du schon nach verschiedenen Kriterien geordnet. Einmal ging es um die Symmetrie der Vierecke, das andere Mal halfen die Eigenschaften der gegenüberliegenden Seiten beim Ordnen. Lässt sich auch mit den Eigenschaften der Diagonalen Ordnung in die Vierecke bringen? DGS hilft dabei!

Forschungsauftrag 1
Konstruiere ein beliebiges Viereck, bei dem sich die Diagonalen halbieren.

Anleitung
(1) Konstruiere eine beliebige Strecke $\overline{AC}$.
(2) Konstruiere den Mittelpunkt M dieser Strecke.
(3) Konstruiere einen beliebigen Punkt B.
(4) Spiegele den Punkt B an M auf D.
(5) Zeichne das Viereck ABCD.



Wenn du die Anleitung befolgt hast, wirst du eine Figur wie in der Abbildung erhalten.
Ziehe an einem Eckpunkt des Vierecks –
Was verändert sich – was bleibt gleich?
Um was für eine Art von Viereck handelt es sich?

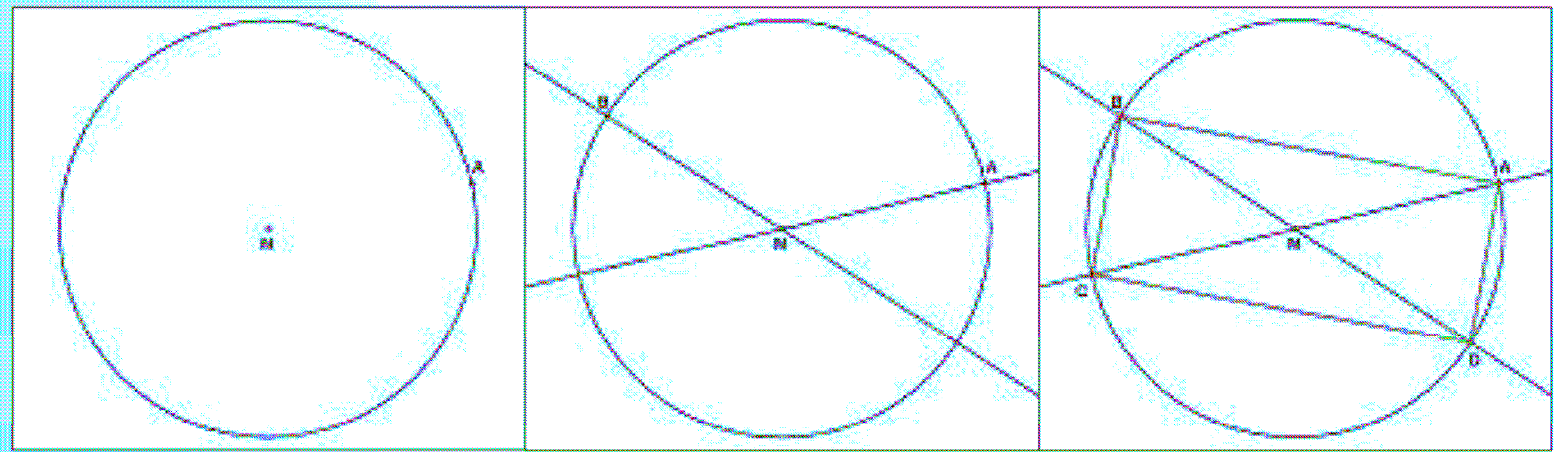
(1) Konstruiere einen beliebigen Kreis mit zwei Punkten (Mittelpunkt M).

(2)...

Forschungsauftrag 2

Die Bilderfolge zeigt die Konstruktion eines weiteren Vierecks.

- Gib eine Konstruktionsbeschreibung an und führe sie mit dem DGS aus. Den ersten Konstruktionsschritt haben wir schon verraten.
- Ziehe an einem Eckpunkt des Vierecks – Was verändert sich – was bleibt gleich?
- Um was für eine Art von Viereck handelt es sich?



Forschungsauftrag 3

Konstruiere ein beliebiges Viereck, bei dem sich die Diagonalen halbieren und orthogonal sind.

Kurzanleitung

(1) Konstruiere eine beliebige Strecke $\overline{AC}$.
(2) Konstruiere die Mittelsenkrechte m dieser Strecke.
(3) Binde einen Punkt B auf m.
(4) Spiegele B an $\overline{AC}$ auf D.

Forschungsauftrag 4

Konstruiere ein beliebiges Viereck, bei dem die Diagonalen gleich lang sind, sich halbieren und orthogonal sind.

Kurzanleitung

Kombiniere die Anleitungen der Aufträge 2 und 3.

Forschungsauftrag 5

Konstruiere ein beliebiges Viereck, bei dem die Diagonalen orthogonal sind und eine durch deren Schnittpunkt halbiert wird.

Kurzanleitung

(1) Konstruiere eine beliebige Strecke $\overline{AC}$.
(2) Binde einen Punkt P auf die Strecke $\overline{AC}$.
(3) Konstruiere eine Orthogonale s zu $\overline{AC}$ durch P.
(4) Binde einen Punkt B auf s.
(5) Spiegele B an P auf D.

Forschungsauftrag 6

Konstruiere ein beliebiges Viereck bei dem die Diagonalen gleich lang sind und durch den Schnittpunkt in jeweils gleich lange Abschnitte geteilt werden.

Kurzanleitung

(1) Konstruiere einen Kreis k1 um M durch P1.
(2) Konstruiere einen Kreis k2 um M durch P2.
(3) Binde die Punkte A und B auf k1.
(4) Konstruiere die Geraden (AM) und (BM).
(5) Bezeichne die Schnittpunkte von (AM) und k2 bzw. (BM) und k2 mit C bzw. D, so dass sich die Diagonalen des Vierecks ABCD in M schneiden.

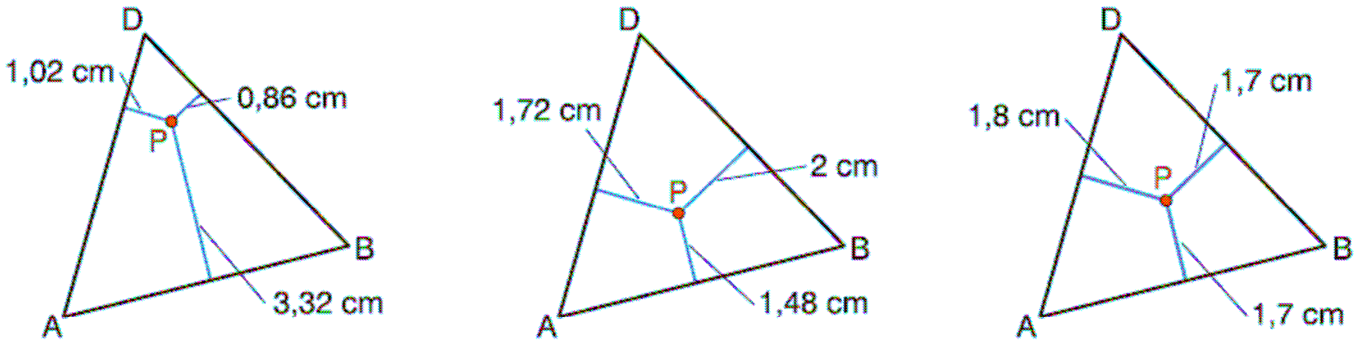
Wei

Aufgaben

Tipp zu b): Hier lohnt es sich, einen Term zu erstellen, der direkt die Summen der Abstände ausrechnet

15 *Forschungsaufgabe*

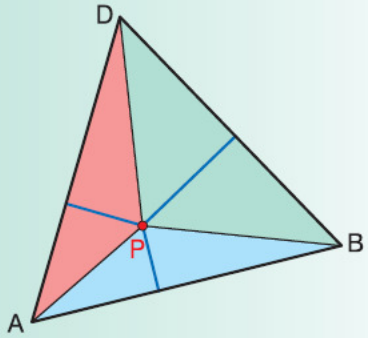
In den Abbildungen handelt es sich jeweils um das gleiche gleichseitige Dreieck ABC. Angegeben sind jeweils die Abstände des Punktes P zu den Seiten des Dreiecks.



a) Beschreibe die Grundfigur. Was bleibt gleich, was verändert sich? Betrachte dann die Abstände in den einzelnen Abbildungen. Fällt dir etwas auf? Formuliere deine Vermutungen.

b) Überprüfe deine Vermutungen aus a) mit DGS. Konstruiere dazu zuerst die Grundfigur. Bewege dann P mit dem Zugmodus.

c) Gelten deine Vermutungen auch für andere Dreiecke? Experimentiere wieder mit DGS.



Projekt

VINCENZO VIVIANI (1622–1703),
Schüler von GALILEO GALILEI

16 *Satz von Viviani*

Mit deinen Entdeckungen und Vermutungen aus Aufgabe 15 kannst du sicher die Lücken in dem folgenden Satz ausfüllen:

> *Ist P ein beliebiger Punkt im Inneren eines ...., so ist die Summe der Abstände dieses Punktes von den Seiten ....*

Mit Hilfe der nebenstehenden Beweisfigur kannst du dich an den Beweis des Satzes wagen. Beschrifte die Figur sinnvoll, so dass du Terme für den Flächeninhalt der drei Teildreiecke angeben kannst. Finde auch einen Term für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Mit diesen Termen müsste der Beweis des Satzes gelingen.

Welche Vielecke besitzen die „Viviani-Eigenschaft“?

Gilt in einem Vieleck, dass die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes P im Inneren des Vielecks von den Seiten konstant ist, so hat das Vieleck die *Viviani-Eigenschaft*. Untersuche verschiedene Dreiecke, Vierecke und Vielecke auf diese Eigenschaft. Anregungen findest du unten. Experimentiere mit DGS. Versuche anschließend, deine Beobachtung zu beweisen. Dokumentiere dein Vorgehen und deine Ergebnisse auf einem Plakat oder in einem Protokoll.

Quadrat	Rechteck	Rechtwinkliges Dreieck
Raute	Regelmäßiges Sechseck	Gleichschenkliges Trapez
Sechseck mit paarweise parallelen Gegenseiten	Fünfeck mit gleich langen Seiten, aber verschiedenen Innenwinkeln Rechteck	Fünfeck mit gleichen Innenwinkeln, aber unterschiedlichen Seitenlängen

Erstellen einer Expertise

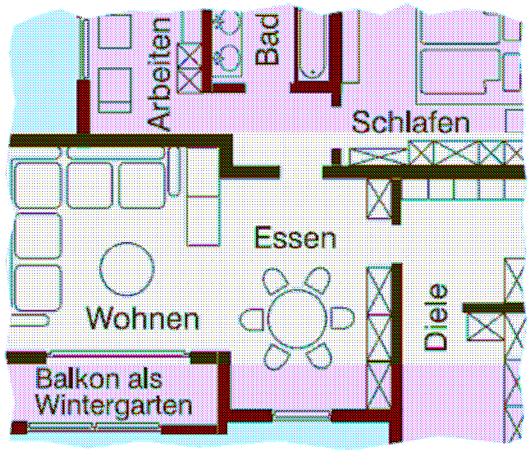
Familie Clever bezieht eine neue Eigentumswohnung in der Innenstadt. Nun muss ein neuer Vertrag mit dem städtischen Energieunternehmen geschlossen werden. Es stehen drei verschiedene Tarife zur Auswahl:

	Grundgebühr	Gebühr pro Zimmer	Kosten pro kWh
Tarif I	20€	2€	8 ct
Tarif II	20€	4€	5 ct
Tarif III	10€	Keine	20 ct

Da der Balkon als Wintergarten ausgebaut ist, wird die Wohnung in der Standardausführung mit 7 Zimmern geführt.

Die Eltern bitten Judith und Marvin eine „Expertise" zu den folgenden Problemen zu erstellen.

a) In einer übersichtlichen Darstellung sollen die Tarife I, II und III verglichen werden. Insbesondere soll erkennbar sein, bei welchem Energieverbrauch welcher Tarif am günstigsten ist.



Was sollte eine Expertise enthalten:

- Ergebnisse in übersichtlicher Form
- Begründung der Ergebnisse
  Hier könnte es sein:
  - Tabellen für den Verbrauch im Vergleich.
  - Grafische Darstellung der Kosten in Abhängigkeit vom Verbrauch.
  - Eine Berechnung der Schnittpunkte, d. h. Berechnung des Verbrauchs, bei dem die Kosten für die einzelnen Tarife gleich sind.

Entscheide selbst, wie die Expertise aussehen soll.

b) Erstelle eine Expertise für eine Wohnung mit nur 5 Zimmern.

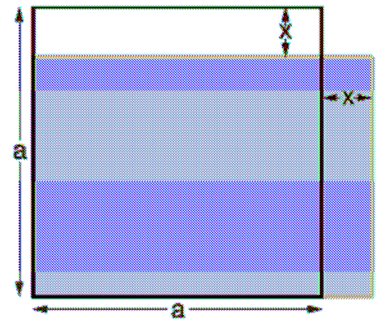
Klasse 10

20 *Optimieren ohne Differenzialrechnung*

Extremwertaufgaben haben Menschen lange vor der Entwicklung der Differenzialrechnung gelöst. Es muss also noch andere Wege zur Lösung solcher Probleme geben. Meistens waren es geometrische Methoden, die häufig zu eleganten Lösungen führten, manchmal aber auch einfache algebraische Ansätze.
In den nächsten Aufgaben wirst du etwas von diesen Methoden an bekannten und neuen Problemen kennen lernen und selbst ausprobieren können.

(A) *Isoperimetrisches Problem*

Unter allen umfangsgleichen Rechtecken hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.



Geometrischer Beweis

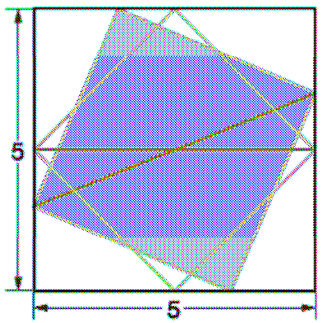
Zeige, dass das gefärbte Rechteck für jedes x den gleichen Umfang hat wie das Quadrat. Zeige, dass der Flächeninhalt des oberen (weißen) Rechtecks immer größer ist als der des rechten (gelben) Rechtecks und begründe damit, dass das Quadrat unter allen umfangsgleichen Rechtecken den maximalen Flächeninhalt hat.

Algebraischer Beweis

Gib einen Term für den Flächeninhalt des gefärbten Rechtecks an und begründe damit, dass dieser für jeden Wert von x kleiner als der Flächeninhalt des Quadrates ist.

(B) *Quadrate im Quadrat*

Welches der inneren Quadrate hat den kleinsten Flächeninhalt?



Vergleiche die Diagonalen der Quadrate.

Was weißt du über die Beziehungen der Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken?

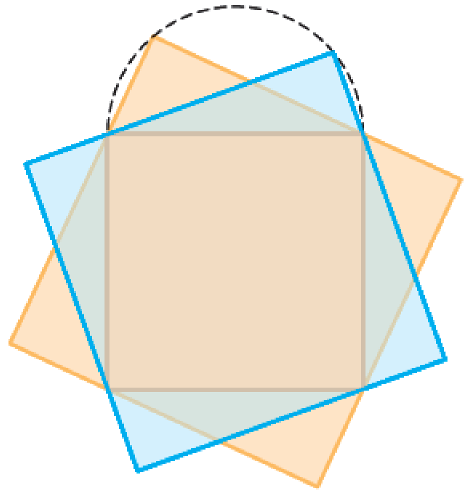
Warum ist damit das Problem auch für beliebige Ausgangsquadrate beantwortet?

Aufgaben

(C) Zu den „Quadraten im Quadrat“ kann man auch das ‚umgekehrte‘ Problem formulieren:

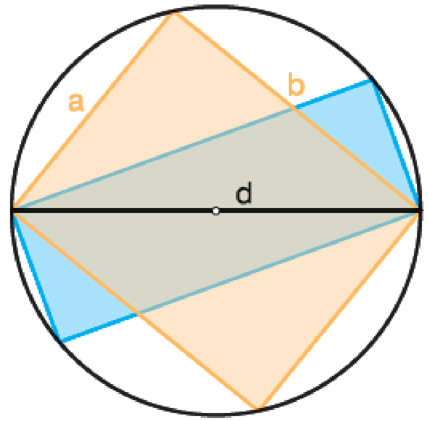
Zu einem gegebenen festen Quadrat sollen Quadrate konstruiert werden, die das Quadrat umschreiben. Welches dieser Quadrate hat einen maximalen Flächeninhalt?

Zeichne ein Quadrat ABCD und konstruiere einige umbeschriebene Quadrate.
(Hinweis: Satz des Thales)



(D) Welches unter allen Rechtecken in einem gegebenen festen Kreis hat den maximalen Flächeninhalt?

Vergleiche die Dreiecke in der Abbildung und benutze den Thalessatz.



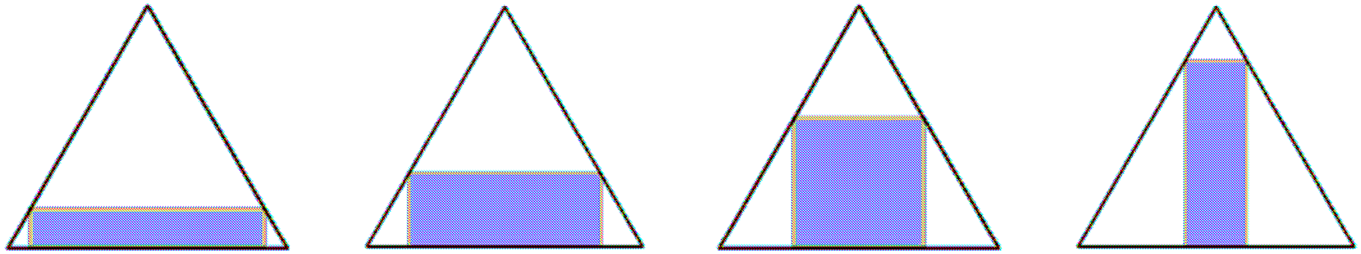
Aufgaben

21 *Viele Wege zum Ziel*

Hier kannst du an einem Problem verschiedene Lösungsmethoden ausprobieren und diese dann miteinander vergleichen.

Das Problem

Einem gleichseitigen Dreieck werden Rechtecke einbeschrieben. Welches dieser Rechtecke hat einen maximalen Flächeninhalt?

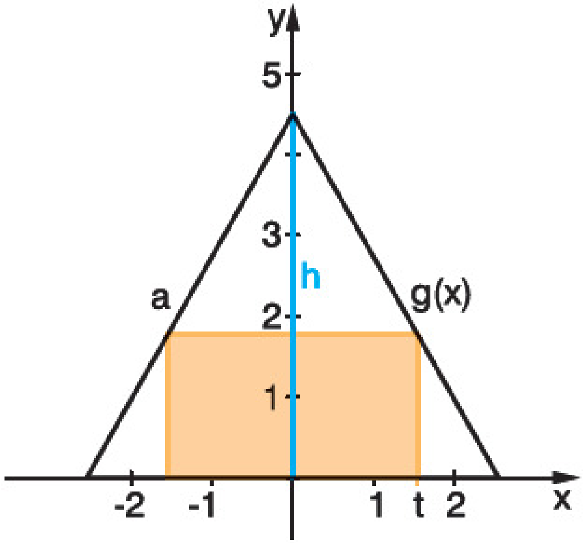


(A) Funktionaler Weg:

Beschreibe die Seiten durch lineare Funktionen.

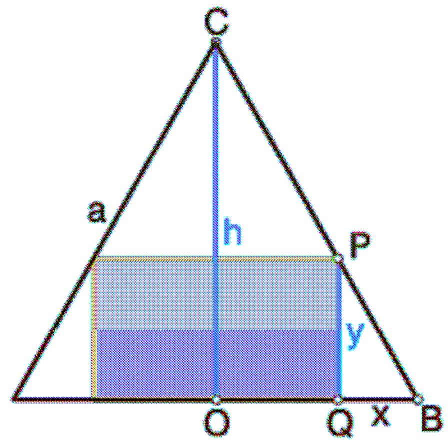
Tipps für mögliche Wege:

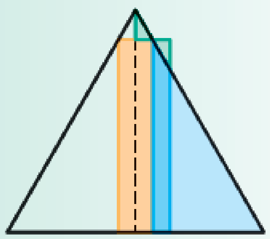
Höhe des Dreiecks in Abhängigkeit von a bestimmen	Koordinaten der Eckpunkte in Abhängigkeit von a angeben	Steigung von g (x) bestimmen



(B) Algebraisch-geometrischer Weg:

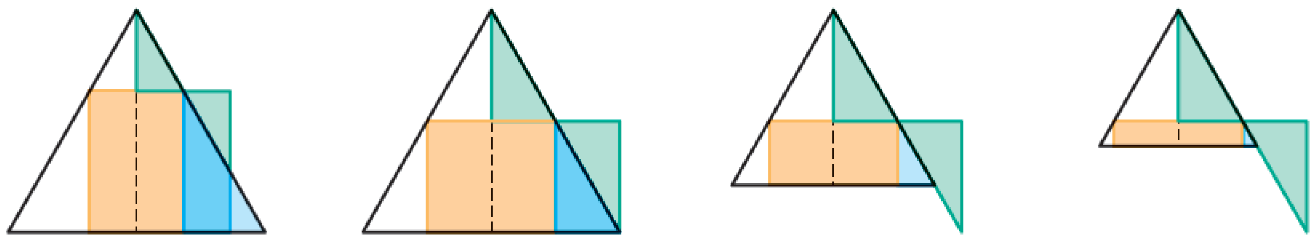
- Bestimme h in Abhängigkeit von a.
- Gib einen Term für den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von x und y an.
- Die Ähnlichkeit der Dreiecke COB und PQB liefert eine Nebenbedingung für y.





(C) Geometrischer Weg:

Bilder ohne Worte



Begründe, dass die Summe aus dem Flächeninhalt eines grünen Dreiecks und des blauen Dreiecks immer mindestens so groß wie der halbe Inhalt des gelben Rechtecks ist. Wann sind sie gleich groß?

Vergleiche die Lösungswege:

- Welche Kenntnisse und Verfahren musst du bei den einzelnen Wegen abrufen?
- Welche Wege können einfach abgearbeitet werden, bei welchen benötigt man „zündende Ideen“?
- Welcher Weg ist für dich am einfachsten?
- Welchen Weg findest du am schönsten?

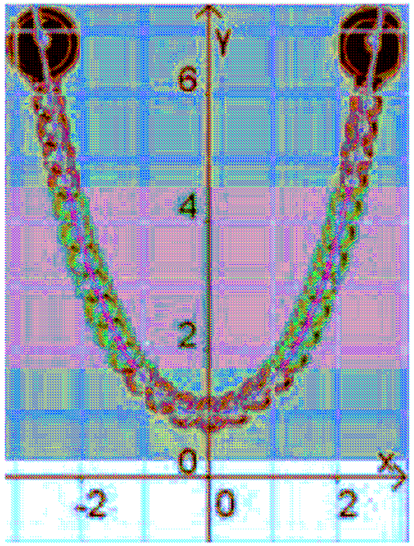
Sek 2

Aufgaben

19 *Zwei Modelle einer Kette*

Eine frei hängende Kette nimmt unabhängig von der Aufhängung und der Länge eine parabelförmige Form an. Ist es auch eine Parabel?
Die Abbildung zeigt zwei nach Anschauung passende Graphen verschiedener Funktionstypen:

$P_a(x) = a x^2 + 1$; $K_k(x) = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx})$



a) Bestimmen Sie jeweils einen passenden Wert für die Parameter a und k. Welche Kurve passt besser?
Zeichnen Sie beide zugehörigen Graphen und beschreiben Sie den unterschiedlichen Verlauf. Präzisieren Sie die Unterschiede mithilfe der ersten und zweiten Ableitungen.

17

b) Skizzieren Sie die Schar von Kettenlinien K_k für $k > 0$. Bestimmen Sie den Tiefpunkt für beliebiges k. Zeigen Sie, dass es keine Wendepunkte gibt. Warum ist Letzteres vom Ausgangsproblem her klar?

Das Problem der hängenden Kette

Aus einem Manuskript von LEIBNIZ

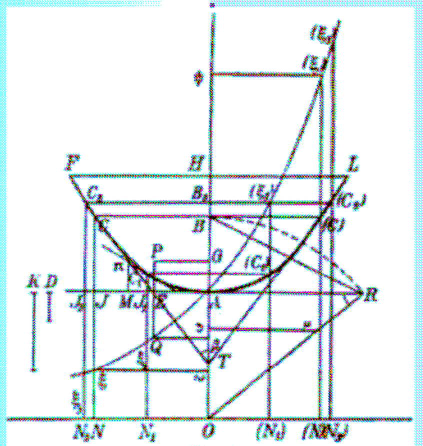


Fig. 4.

Das Problem, die Linie einer frei hängenden Kette durch eine Funktion zu beschreiben, taucht schon bei GALILEI auf. Er glaubte, dass die Kurve eine Parabel ist. HUYGENS wies dann als 17-jähriger nach, dass es keine Parabel sein kann.

Später (1690) wurde das Problem von LEIBNIZ, HUYGENS und JOHANN BERNOULLI gelöst. Sie konnten mit physikalisch-mathematischen Mitteln zeigen, dass die Kette folgende Bedingung erfüllen muss: $f''(x) = k \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}$.
Diese Bedingung wird aber nur von den Funktionen $K_k(x)$ erfüllt und nicht von Parabeln. Diese Funktionen heißen daher auch **Kettenlinien.**

Projekt

A – D sind einzelne Projektaufgaben, die weitgehend unabhängig voneinander behandelt werden können. Sie thematisieren sowohl innermathematische Eigenschaften der Kettenlinien als auch ihre Anwendbarkeit.

A *Anpassen von Polynomen an Kettenlinie*

Die Kettenlinie ist keine Parabel, hat aber eine ähnliche Form. Welche Parabel passt gut zur Kettenlinie? An der Stelle $x = 0$ sollen die Parabel und die Kettenlinie im Funktionswert und in den ersten beiden Ableitungen übereinstimmen.

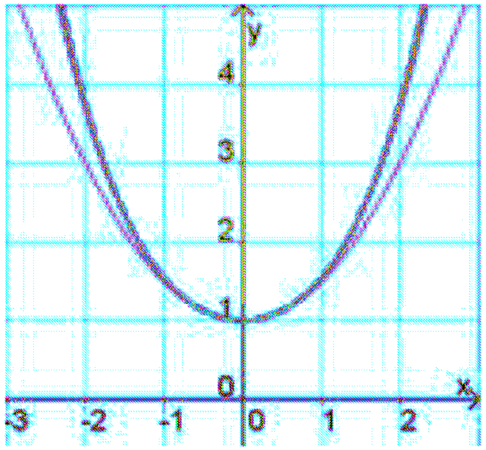
Ansatz:
$y = ax^2 + bx + c$

Eine bessere Anpassung an die Kettenlinie erhält man, wenn man Polynome höheren Grades ermittelt und dazu die entsprechende Übereinstimmung an der Stelle $x = 0$ auch in den höheren Ableitungen fordert. Warum werden in den Lösungen nur gerade Exponenten auftreten? Bestimmen Sie das Polynom vom Grad 4 und das vom Grad 6.

Ansatz:
5 Bedingungen:
$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Wie lautet das Polynom vom Grad 8, wie das Polynom vom Grad n?

Polynom 6. Grades:
$f(x) = \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{2!}x^2 + 1$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

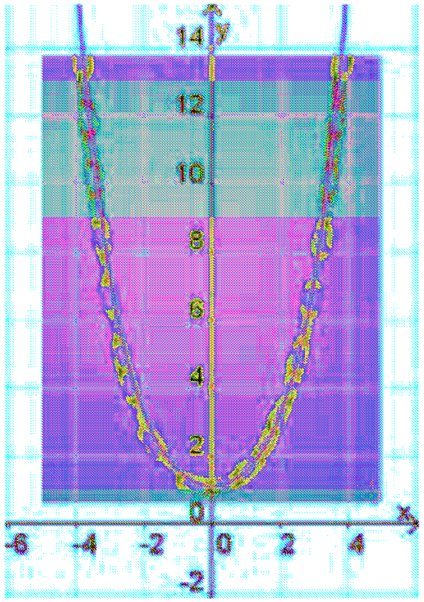


B *Kettenlinien an Daten anpassen*

Finden Sie geeignete Parameterwerte für a, b und c, so dass die Kettenlinie gut zu der abgebildeten Kette passt. Benutzen Sie die Kettenlinie in folgender Darstellung:

$$K(x) = \frac{1}{a}(e^{bx} + e^{-bx}) + c$$

Am einfachsten gelingt dies mit einem Funktionenplotter. Mit einem CAS können Sie auch die Parameterwerte berechnen. Lesen Sie dazu zunächst neben dem Punkt (0|1) noch zwei weitere Punkte ab. Lösen Sie dann das nichtlineare Gleichungssystem, das entsteht, wenn man die abgelesenen Koordinaten in die Funktionsgleichung einsetzt, mit dem Einsetzungsverfahren. Werten Sie dafür zunächst die Gleichung für den Punkt (0|1) aus.



Aufgaben

CAS

C Kettenlinien und Parabeln unterscheiden

Für Termexperten: Zeigen Sie, dass Kettenlinien $K_k(x) = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx})$ die Bedingung $f''(x) = c \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}$ erfüllen und die Parabeln $P_a(x) = ax^2 + 0{,}5$ nicht.

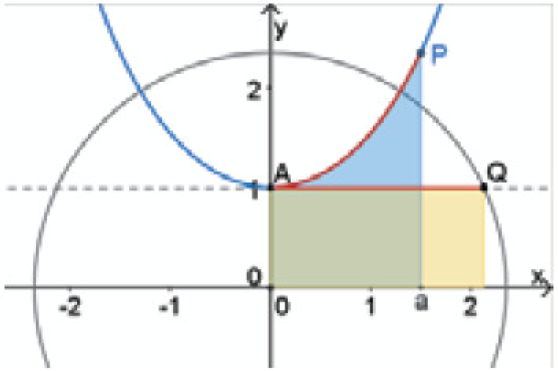
binomische Formel

D Geometrische Konstruktion der Länge eines Kettenstücks

a) Bestimmen Sie für $K(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ die
- Steigung an der Stelle a,
- den Flächeninhalt unter der Kurve in $[0;a]$,
- die Länge des Bogens in $[0;a]$

Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse.

b) Begründen Sie, dass $\overline{AQ} = K'(a)$ ist. Zeigen Sie damit und mit den Ergebnissen aus a), dass man die Länge eines Kettenstücks zwischen A und P als Strecke $s = \overline{AQ}$ geometrisch konstruieren kann. Wie lässt sich die Fläche unter dem Kettenstück in $[0;a]$ in ein flächengleiches Rechteck verwandeln?



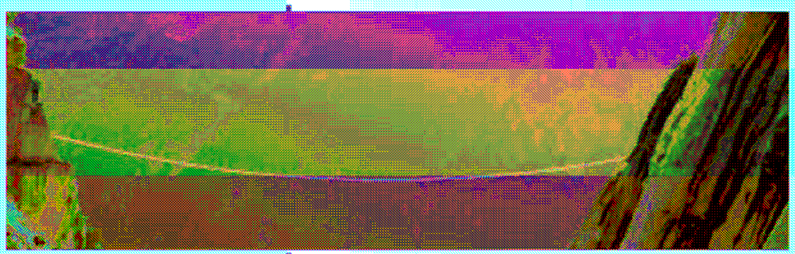
Konstruktionsbeschreibung zu Q:
(1) Kreis mit $r = K(a)$ und $M(0|0)$
(2) Parallele zur x-Achse durch den Tiefpunkt von K
(3) Schnittpunkt der Parallele mit dem Kreis

Bogenlänge von K in [0; a]:
$\int_0^a \sqrt{1 + K'(x)^2}\,dx$

Tipps:
- $K''(x) = K(x)$
- $K''(x) = \sqrt{1 + K'(x)^2}$
- Satz des Pythagoras

Brücken und Kettenlinien

Eventuell haben Sie schon einmal Brückenbögen mithilfe einer Parabel modelliert. Sind das nun eigentlich auch Kettenlinien?
Von der Form her passen sicher beide Kurventypen ganz gut. Mit mathematisch-physikalischen Methoden kann man aber zeigen, dass die Bögen bei Hängebrücken wie der Golden Gate Bridge angemessener mit Parabeln modelliert werden, frei hängende Hängebrücken, wie die Salbitbrücke, besser mit einer Kettenlinie. Wo liegt der Unterschied?
Bei den Straßenbrücken hängt an den Bögen eine sehr große Last, nämlich die Fahrbahn. Dies ist bei den frei hängenden Brücken nicht der Fall.



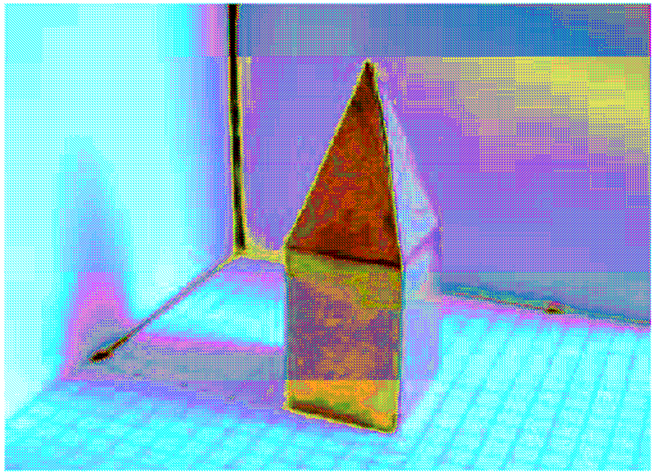
Salbitbrücke (Schweiz)

Golden Gate Bridge (USA)

Projekt

Schrägbilder mit dem Computer

Mit vielen Computerprogrammen lassen sich ganz einfach Schrägbilder von geometrischen Körpern erzeugen. Man braucht dafür ein Computeralgebrasystem, eine Tabellenkalkulation oder einen Taschencomputer. Grundlage ist die Beschreibung des Körpers mithilfe der räumlichen Koordinaten der Eckpunkte.



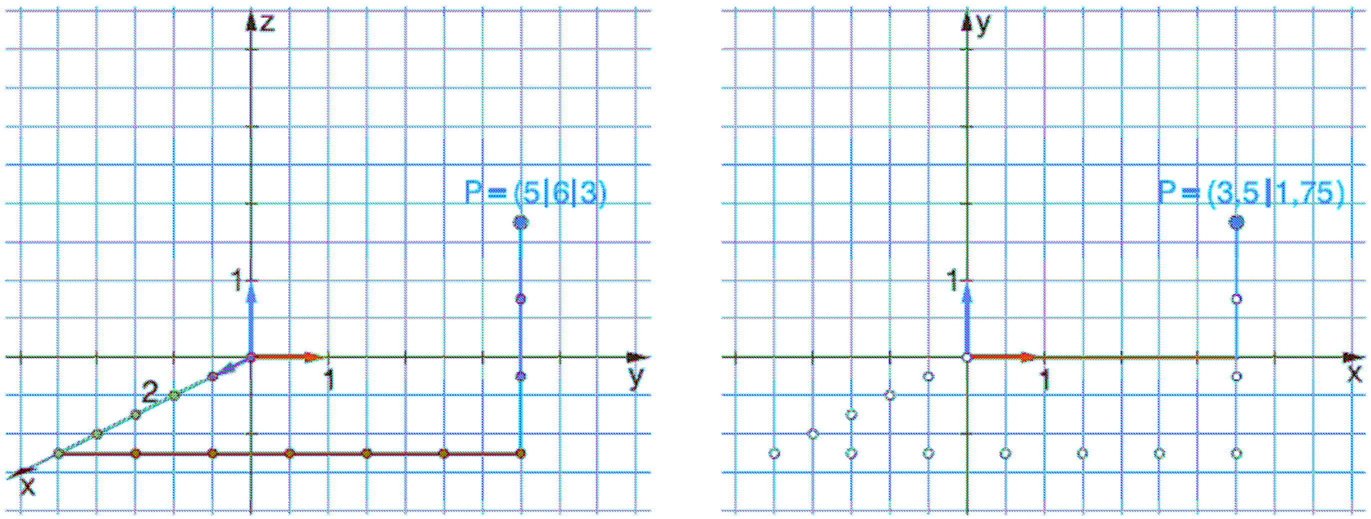
Jede Darstellung eines geometrischen Objekts, sei es mit Bleistift und Lineal auf einem Blatt Papier, mit Geodreieck und Kreide an der Tafel oder mit dem Computer auf dem Bildschirm ist eine Projektion des dreidimensionalen Raumes in die zweidimensionale Ebene.

„2-1-Koordinatensystem"
siehe Exkurs Seite 251

Um das Schrägbild eines Körpers mit dem Computer darstellen zu können, müssen die Raumkoordinaten geeignet in 2D-Koordinaten transformiert (umgerechnet) werden. Dies ist natürlich abhängig von dem zur Darstellung verwendeten 3D-Koordinatensystem (hier „2-1-Koordinatensystem"). Wenn das geleistet ist, müssen die Bildpunkte nur noch miteinander verbunden werden.

Aktivitäten

a) Zeichnen Sie den Punkt P = (5|6|3) in das räumliche Koordinatensystem und lesen Sie die Bildkoordinaten in dem zweidimensionalen Koordinatensystem ab.
Sie entnehmen der Zeichnung: (3,5|1,75).



b) Bestimmen Sie auch für die folgenden Punkte die 2D-Bildkoordinaten, indem Sie die Punkte einzeichnen und die entsprechenden Koordinaten ablesen:
(–4|–5|6) und (8|7|1) und (–2|7|1).

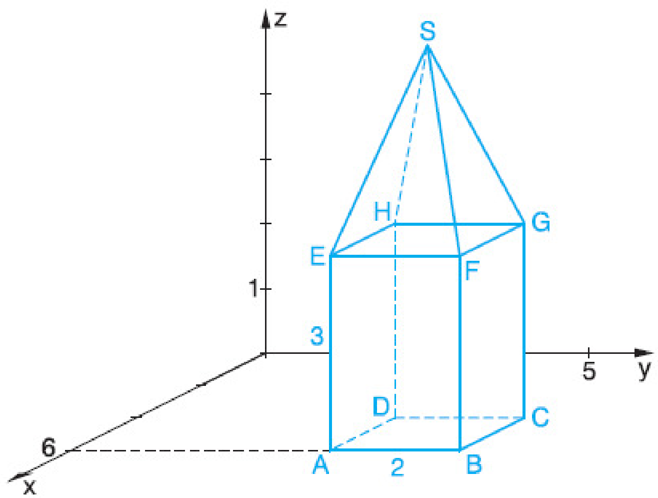
c) Berechnen Sie für die folgenden Punkte die 2D-Bildkoordinaten:
(20|35|70) und (150|–24|160).

Berechnungsformel

Bestätigen Sie, dass für die allgemeine Berechnungsformel gilt:
Jeder Schritt in Richtung der (räumlichen) x-Achse ist (im 2D-Koordinatensystem) ein halber Schritt nach links und ein viertel Schritt nach unten.
Es gilt also:

$$\boxed{(x\,|\,y\,|\,z) \rightarrow (-0{,}5\,x + y\,|\,-0{,}25\,x + z)}$$

Damit ist eine wichtige Hürde genommen. Sie können jetzt die Koordinaten eines beliebigen Punktes im Raum so transformieren, dass die Punkte in der Ebene dargestellt werden können.
Nun werden wir ein Schrägbild des Turms auf dem Bildschirm erzeugen.



Bestimmen Sie die räumlichen Koordinaten der Eckpunkte des Turms mit quadratischer Grundfläche (Der Punkt A hat die Koordinaten (6|4|0) und der Punkt S hat die dritte Koordinate 6).
Die meisten Grafikprogramme können Punkte miteinander verbinden. Informieren Sie sich, wie das mit dem von Ihnen benutzten Programm geht.

Aufgabe

Die Punkte werden in der Reihenfolge in den PC eingegeben, in der sie miteinander verbunden werden sollen. Dabei müssen einzelne Kanten unter Umständen mehrmals durchlaufen werden. Stellen Sie sich vor, Sie wollten die sichtbaren Kanten in einem Zug zeichnen, ohne den Stift abzusetzen.

die entscheidende Idee

Stellen Sie den Turm mit dem Ihnen zur Verfügung stehenden Programm dar.

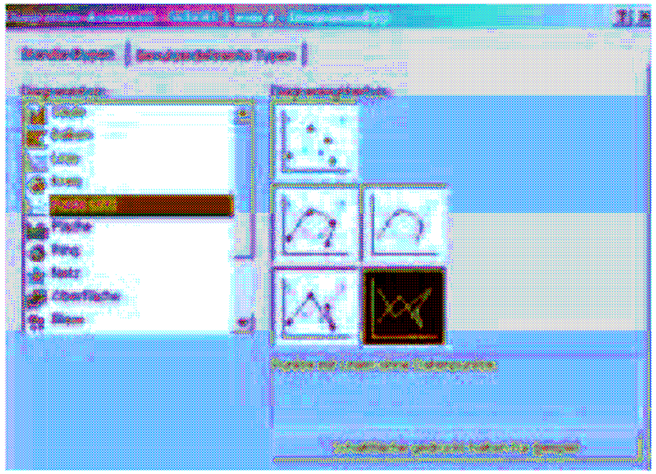
Aufgabe

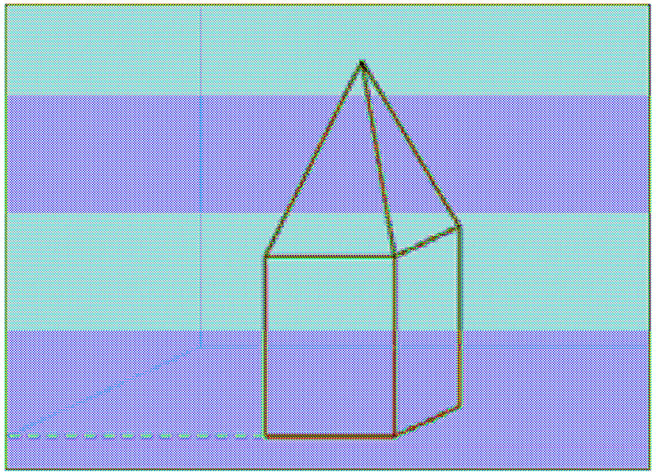
	Räumliche Koordinaten				Zugehörige 2D-Koordinaten	
	x	y	z		x1	x2
E	6	4	3		1	1,5
A	6	4	0		1	-1,5
B	6	6	0		3	-1,5
F	6	6	3		3	1,5
E	6	4	3		1	1,5
S	5	5	6		2,5	4,8
F	6	6	3		3	1,5
G	4	6	3		4	2
S	5	5	6		2,5	4,8
G	4	6	3		4	2
C	4	6	0		4	-1
B	6	6	0		3	-1,5

Die Berechnung der 2D-Koordinaten erfolgt in der Tabellenkalkulation mit der oben erarbeiteten Formel.
Im Diagrammassistenten den Diagrammtyp Punkt(XY) wählen und die Punkte geradlinig verbinden.

Tabellenkalkulation

1102.xls
1103.ggb





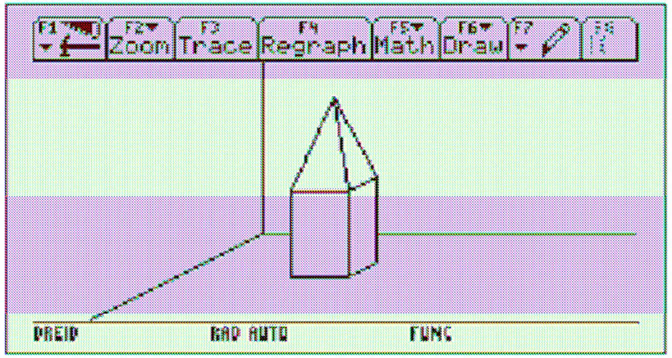


Bild mit einem Tasche

Projekt

Experimentieren

Zentralperspektive, DÜRER und 3D-Kino

Das Kantenmodell eines Würfels wird vor einer weißen Wand durch eine punktförmige Lichtquelle beleuchtet und erzeugt einen Schatten an der Wand. Das Schattenbild sieht anders aus als alle Darstellungen eines Würfels, die Sie bisher benutzt haben. Sie haben mathematische Werkzeuge kennen gelernt, die es Ihnen erlauben, diese Bilder rechnerisch herzustellen. Die Lichtstrahlen durch die Eckpunkte können als Geraden gedeutet werden, deren Schnittpunkte mit der Wand (Ebene) bestimmt werden können.
Experimentieren Sie selber mit einem Kantenmodell und einer Lampe.

Perspektivisches Bild des Würfels berechnen

2201.ggb

Auf der x_1x_2-Ebene steht ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H. Dabei sind $A = (0|3|0)$, $B = (4|0|0)$, $D = (3|7|0)$ und $E = (0|3|5)$ gegeben.
Der Würfel wird vom Punkt $L = (12|3|3)$ aus beleuchtet, das Bild wird auf der „Wand" x_2x_3-Ebene erzeugt.

- Bestimmen Sie die Koordinaten der anderen Eckpunkte.
- Berechnen Sie die Koordinaten der Bildpunkte A_1, B_1, …, H_1 und zeichnen Sie das Bild des Würfels in der x_2x_3-Ebene.

ALBRECHT DÜRER

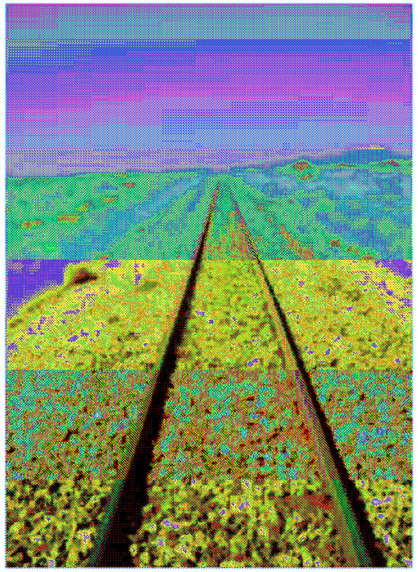
Spätestens seit der Renaissance sind verschiedene Techniken zur Herstellung von realistischen Bildern räumlicher Objekte verwendet worden.
ALBRECHT DÜRER hat in einer Zeichnung eine Handlungsanweisung für die Erzeugung perspektivischer Darstellungen festgehalten.

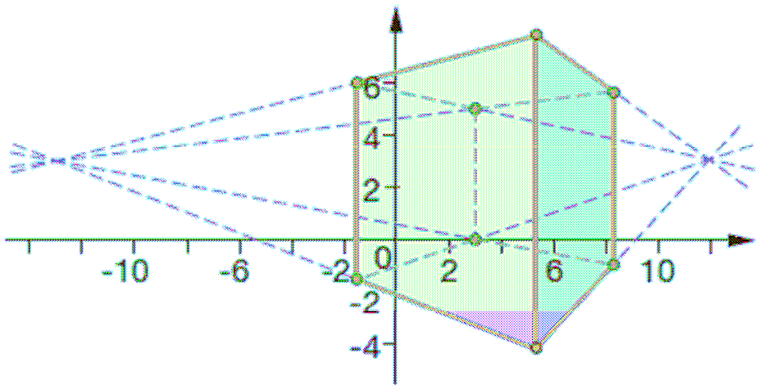
Mathematisieren

Formulieren Sie die im Bild dargestellte Methode mit Ihren eigenen Worten als Anleitung zum Zeichnen.
Was ist der wesentliche Unterschied zwischen der von Ihnen oben benutzten Methode und der in DÜRERS Bild dargestellten Technik? Wo liegen die Gemeinsamkeiten?

Parallele Kanten

Sie haben sicherlich festgestellt, dass in Ihrer Zeichnung die Bilder von parallelen Kanten nicht mehr parallel sind.
Jeder kennt das Phänomen:
Die Eisenbahnschienen scheinen aufeinander zuzulaufen und sich am Horizont zu treffen, obwohl wir alle wissen, dass die Schienen in Wirklichkeit parallel sind und immer den gleichen Abstand zueinander haben.
Im Bild sind die Eisenbahnschienen keine parallelen Geraden – sie schneiden sich.
Ist dieses Phänomen typisch für perspektivische Abbildungen?



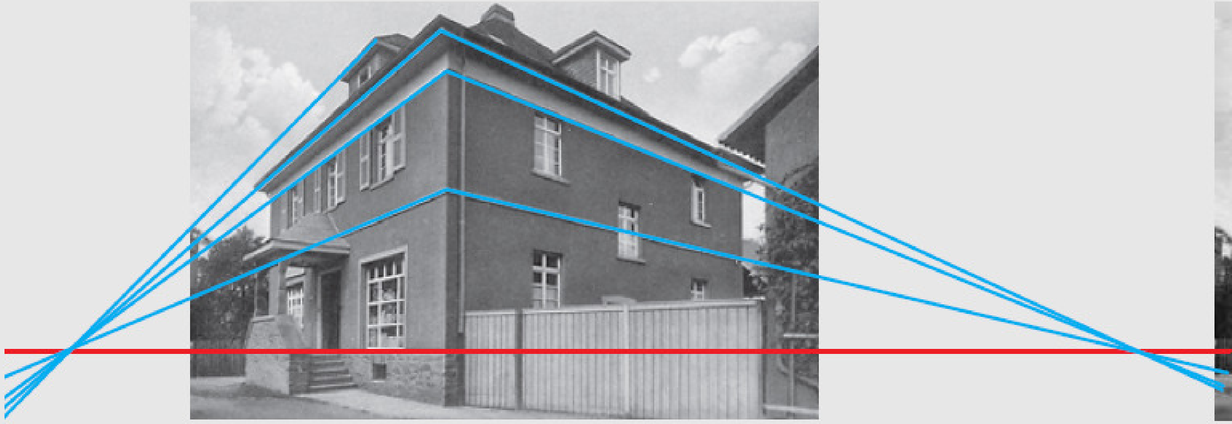


Am Anfang des Projekts haben Sie an einem konkreten Beispiel ein perspektivisches Bild des Würfels erstellt. Zeigen Sie hierfür rechnerisch, dass sich die Bilder der Geraden, die durch im Würfel parallele Kanten verlaufen, in einem Punkt schneiden.

Bestimmen Sie die Koordinaten dieser sogenannten „**Fluchtpunkte**“.

3D im Gehirn

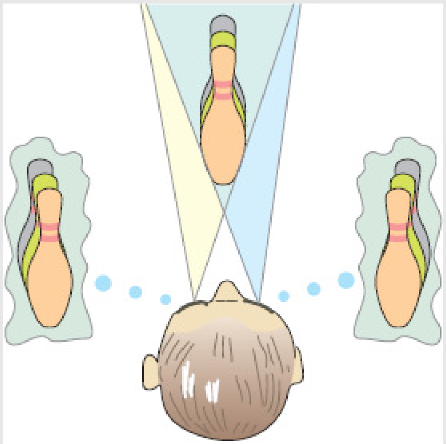
Auch auf Fotografien lassen sich Fluchtpunkte rekonstruieren.



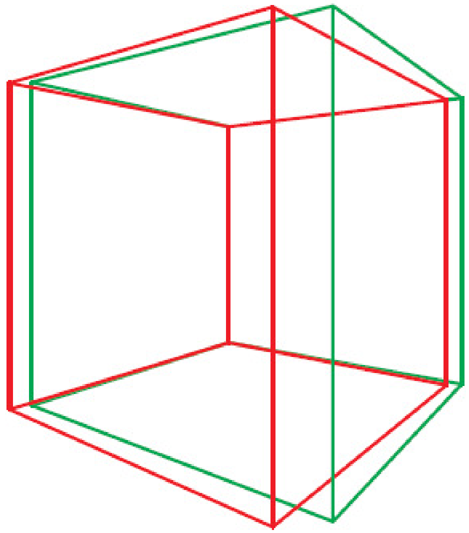
Fluchtpunkte in Fotografien

Die Eigenschaft, dass sich die Bilder paralleler Geraden in einem Punkt schneiden, wird in der darstellenden Geometrie zur Konstruktion von perspektivischen Darstellungen genutzt.

Mit der perspektivischen Darstellung möchte man möglichst realistische Bilder von Objekten erzeugen, und zwar so, wie sie vom menschlichen Auge wahrgenommen werden. Die hier beschriebene Methode ist gut geeignet für den Blick mit einem Auge.
Der Mensch hat aber zwei nebeneinander liegende Augen, die jedes für sich ein eigenes Bild sehen. Erst im Gehirn werden beide Bilder zu einem räumlichen Bild zusammengefügt.



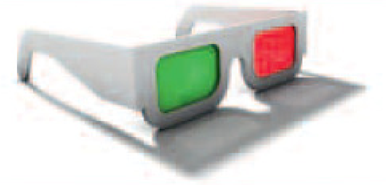
Sie haben auf der vorigen Seite bereits ein perspektivisches Bild des Würfels gezeichnet. Berechnen und zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem ein zweites Bild des Würfels, das entsteht, wenn der Würfel von dem Punkt $L_2 = (12|4|3)$ aus beleuchtet wird. L_2 liegt neben dem Punkt L.



Zeichnen Sie das erste Bild in grün und das zweite Bild in rot.
Besorgen Sie sich eine rote und grüne Folie und basteln Sie daraus eine Rot-Grün-Brille.
Wenn Sie nun das Bild der beiden Würfel betrachten (rote Folie am linken Auge) werden Sie ein räumliches Bild wahrnehmen.

Auf dem Prinzip, zwei unterschiedliche Bilder zu zeigen, beruhen auch die in den neuen 3D-Kinos gezeigten Filme, die ein völlig anderes dreidimensionales Sehen ermöglichen.

Räumliches Sehen mit Rot-Grün-Brille



2203.ggb

Henning Körner: hen.koerner@t-online.de